



Concours Mathématiques et Physique
Épreuve de Mathématiques II

Session 2025	Date : 03/06/2025	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

L'usage de la calculatrice et tout autre dispositif électronique est interdit.

Donnez vos réponses aux questions dans les espaces prévus sur les feuilles de réponses. Si vous avez besoin de plus d'espace pour une réponse, vous pouvez utiliser l'espace supplémentaire disponible à la fin des feuilles de réponses en précisant le numéro de la question et en indiquant dans l'espace réponse que la réponse se poursuit sur l'espace supplémentaire.

Notations et définitions :

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace des matrices carrées d'ordre n (resp. l'espace des matrices à n lignes et à une seule colonne) à coefficients réels. On note tA la transposée d'une matrice A , $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (vérifiant ${}^tM = M$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice unité d'ordre n .

Si $A_1, \dots, A_p$ sont des matrices carrées, on note $\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont ordonnés de A_1 jusqu'à A_p .

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A)$, χ_A , $\text{Sp}(A)$ et $E_\lambda(A)$ désignent respectivement le déterminant de A , le polynôme caractéristique de A , le spectre réel de A et le sous-espace propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel défini par

$$\langle X, Y \rangle = {}^tXY, \quad \text{pour tous vecteurs } X \text{ et } Y \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$.

Lorsque E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, Id_E est l'endomorphisme identité de E .

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_m[X]$ désigne

Partie I.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.1 ▷ On pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. Vérifier que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $(M_1, M_2) \in (\mathcal{C}(A))^2$ alors $M_1 M_2 \in \mathcal{C}(A)$.

Q.2 ▷ On suppose que $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$ où $U \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) = U \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) U^{-1}$.

Dans les deux questions suivantes, on se propose de démontrer le théorème d'interpolation de Lagrange.
Soient $m \geq 1$ et $a_1, a_2, \dots, a_m$ des réels deux à deux distincts.

Q.3 ▷ Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_{m-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_m))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

Q.4 ▷ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $a_1, \dots, a_m$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.
Dédire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ vérifiant $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Le polynôme P est appelé le polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ interpolateur de f aux points $a_1, \dots, a_m$.

Dans toute la suite, on note $g_0 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$,

$$\mathcal{D}_n^+ = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et telle que } \operatorname{Sp}(M) \subset [0, +\infty[\},$$

$$\mathcal{S}_n^+ = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \operatorname{Sp}(M) \subset [0, +\infty[\}.$$

Q.5 ▷ ► Soit P_0 le polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ interpolateur de g_0 aux points 1 et 4. Vérifier que $P_0 = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$.

► Justifier que $\mathcal{S}_n^+ \subset \mathcal{D}_n^+$.

Q.6 ▷ Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, MX \rangle \geq 0$.

Partie II.

Définition : Soit $A \in \mathcal{D}_n^+$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les éléments deux à deux distincts de $\operatorname{Sp}(A)$ et P le polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ interpolateur de g_0 aux points $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

On définit alors, la matrice racine carrée de A , notée $\sqrt{A}$, par $\sqrt{A} = P(A)$.

II.A)

Q.7 ▷ Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $B \in \mathcal{D}_2^+$. Donner alors l'expression de $\sqrt{B}$.

Q.8 ▷ Soit C une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = 5C - 4I_n$, $C \neq 4I_n$ et $C \neq I_n$. Montrer que $C \in \mathcal{D}_n^+$ et que $\sqrt{C} = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}I_n$.

On considère, dans la suite, une matrice $A \in \mathcal{D}_n^+$. On choisit $U \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$.

Q.9 ▷ Justifier que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \geq 0$ et que $\sqrt{A} = U \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) U^{-1}$.

Q.11 ▷ Soit $R \in \mathcal{D}_n^+$. Montrer que $R^2 \in \mathcal{D}_n^+$ et que $\sqrt{R^2} = R$.

Q.12 ▷ Déduire que $\sqrt{A}$ est l'unique matrice $R \in \mathcal{D}_n^+$ qui vérifie $R^2 = A$.

Q.13 ▷ On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+$. Montrer que $\sqrt{A}$ est l'unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^+$ vérifiant $R^2 = A$.

Q.14 ▷ Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$ et que $\sqrt{{}^tMM} M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Q.15 ▷ **Application:** On considère un sous-groupe G du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$ et soit $M \in G$. Montrer que $\sqrt{{}^tMM} \in G$ puis que ${}^tM \in G$.

II.B)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que la matrice exponentielle de A est définie par $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Dans la suite, on fixe une matrice $A \in \mathcal{D}_n^+$ et on considère le système

$$\begin{cases} X''(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = 0 \end{cases} \quad (S)$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q.16 ▷ On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $Y_0(t) = \frac{1}{2}(e^{t\sqrt{A}} + e^{-t\sqrt{A}})X_0$. Montrer que Y_0 est deux fois dérivable et qu'elle est une solution sur $\mathbb{R}$ du système (S).

Soit $Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable et solution du système (S). On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Z(t) = \begin{pmatrix} Y(t) - Y_0(t) \\ Y'(t) - Y'_0(t) \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ qui appartient à $M_{2n}(\mathbb{R})$.

Q.17 ▷ Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $Z'(t) = BZ(t)$ et $Z(0) = 0$.

Q.18 ▷ Déduire que Z est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ puis que $Y = Y_0$.

Q.19 ▷ Soit L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(t) = \|Y_0(t)\|^2$. Montrer que L est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour $t \in \mathbb{R}$, $L''(t) = 2\langle AY_0(t), Y_0(t) \rangle + 2\|Y'_0(t)\|^2$.

Déduire que si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors L est convexe.

II.C)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $V_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$f(X) = \frac{1}{2}\langle X, AX \rangle - \langle V_0, X \rangle.$$

Q.20 ▷ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X+H) - f(X) = \langle H, AX - V_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle H, AH \rangle.$$

Déduire que f est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en un point X est donnée par

Q.21 ▷ Montrer que f admet un minimum sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ atteint en un point unique qu'on déterminera.

Dans la suite, on pose $S = \sqrt{A}$ et on considère un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q.22 ▷ Justifier que $S \in GL_n(\mathbb{R})$ et vérifier que $f(X) = \frac{1}{2} \|SX - S^{-1}V_0\|^2 - \frac{1}{2} \|S^{-1}V_0\|^2$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q.23 ▷ On pose $\mathcal{F}_S = \{SX, X \in \mathcal{F}\}$. Montrer qu'il existe un unique élément $Y_0 \in \mathcal{F}_S$ tel que

$$\|Y_0 - S^{-1}V_0\|^2 = \min_{Y \in \mathcal{F}_S} \|Y - S^{-1}V_0\|^2.$$

Q.24 ▷ Dédire que la restriction de l'application f sur $\mathcal{F}$ admet un minimum atteint uniquement au point $X_1 = S^{-1}Y_0$.

Partie III. (indépendante des sous-parties II.B et II.C)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle couple de décomposition de Dunford de M , tout couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = D + N$, D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, N est nilpotente et $DN = ND$.

III.A)

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet un couple (D, N) de décomposition de Dunford et on note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes de D .

Q.25 ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \text{Sp}(D)$. Montrer que $\det(I_n - (\lambda I_n - D)^{-1}N) = 1$ puis que $\chi_A(\lambda) = \chi_D(\lambda)$.

Q.26 ▷ Montrer alors que $\chi_A = \chi_D$ et déduire que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.27 ▷ Soit $1 \leq i \leq m$. Vérifier que $(A - \alpha_i I_n)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k N^{n-k} (D - \alpha_i I_n)^k$.

En déduire que $E_{\alpha_i}(D) \subset \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$.

Q.28 ▷ Montrer que $\sum_{i=1}^m \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$ est une somme directe puis que, pour tout $1 \leq i \leq m$, $E_{\alpha_i}(D) = \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$.

On suppose que (D_1, N_1) est un autre couple de décomposition de Dunford de A .

Q.29 ▷ Montrer que $\text{Sp}(D_1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ et que, pour tout $1 \leq i \leq m$, $E_{\alpha_i}(D_1) = E_{\alpha_i}(D)$.

Q.30 ▷ Montrer alors que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $D_1 X = DX$. Dédire que $D_1 = D$ et $N_1 = N$.

On conclut qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus un couple de décomposition de Dunford.

III.B)

On note $\mathcal{T}_n^{+*} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \text{Sp}(M) \subset]0, +\infty[\}$.

On considère, dans cette partie, une matrice $A \in \mathcal{T}_n^{+*}$. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les éléments deux à deux distincts de $\text{Sp}(A)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

Pour tout $1 \leq i \leq m$, on pose $F_i = \text{Ker}((u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i})$, $d_i = \dim F_i$ et on note par u_i l'endomorphisme de F_i induit par u .

Q.32 ▷ Justifier que, pour tout $1 \leq i \leq m$, l'endomorphisme $u_i - \alpha_i \text{Id}_{F_i}$ est nilpotent.

Déduire qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = U \text{diag}(\alpha_1 I_{d_1} + N_1, \dots, \alpha_m I_{d_m} + N_m) U^{-1}$ où pour tout $1 \leq i \leq m$, N_i est une matrice nilpotente de $M_{d_i}(\mathbb{R})$.

Q.33 ▷ Montrer que A admet un unique couple de décomposition de Dunford (D, N) en donnant son expression en fonction de U . Justifier que $D \in \mathcal{D}_n^+$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k le polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vérifiant pour tout $1 \leq i \leq m$, $P_k(\alpha_i) = g_0^{(k)}(\alpha_i)$, où g_0 est la fonction définie dans la partie I, $g_0^{(0)} = g_0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_0^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème (sur $]0, +\infty[$) de g_0 .

On note

$$g_0(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^k = P_0(D) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^{k-1} \right) N.$$

où (D, N) est le couple de décomposition de Dunford de A .

Q.34 ▷ Montrer que $P_0(D) = \sqrt{D}$ et déduire que si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $g_0(A) = \sqrt{A}$.

Désormais, l'expression $g_0(A)$ sera notée $\sqrt{A}$ et appelée racine carrée de A .

Q.35 ▷ Montrer que pour tous $k \geq 2$ et $x > 0$, on a

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} g_0^{(j)}(x) g_0^{(k-j)}(x) = 0.$$

Q.36 ▷ Déduire que, pour tout $k \geq 2$, $\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} P_j(D) P_{k-j}(D) = 0$ et vérifier que $2 P_0(D) P_1(D) = I_n$.

Q.37 ▷ Montrer que, pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $P_k(D) N^j = N^j P_k(D)$ puis établir que $(\sqrt{A})^2 = A$.

Q.38 ▷ Montrer que $\left(\sqrt{D}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^k \right)$ est un couple de décomposition de Dunford de $\sqrt{A}$.

Q.39 ▷ Déduire que $\sqrt{A} \in \mathcal{T}_n^{+*}$.

Exemples :

Q.40 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et $\lambda > 0$. Justifier que $\lambda I_n + M \in \mathcal{T}_n^{+*}$ et montrer que

$$\sqrt{\lambda I_n + M} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} g_0^{(k)}(\lambda) M^k.$$

Q.41 ▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A \in \mathcal{T}_3^{+*}$ et donner la matrice $\sqrt{A}$.



Concours Mathématiques et Physique
Corrigé de l'Épreuve de Mathématiques II

Session 2025	Date : 03/06/2025	Durée : 3 heures
--------------	-------------------	------------------

Notations et définitions :

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace des matrices carrées d'ordre n (resp. l'espace des matrices à n lignes et à une seule colonne) à coefficients réels. On note tA la transposée d'une matrice A , $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (vérifiant ${}^tM = M$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice unité d'ordre n .

Si $A_1, \dots, A_p$ sont des matrices carrées, on note $\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$ la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont ordonnés de A_1 jusqu'à A_p .

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A)$, χ_A , $\text{Sp}(A)$ et $E_\lambda(A)$ désignent respectivement le déterminant de A , le polynôme caractéristique de A , le spectre réel de A et le sous-espace propre de A associé à une valeur propre $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel défini par

$$\langle X, Y \rangle = {}^tX Y, \quad \text{pour tous vecteurs } X \text{ et } Y \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

et de la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$.

Lorsque E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, Id_E est l'endomorphisme identité de E .

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_m[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à m .

Partie I.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q.1 ▷ On pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AM = MA\}$. Vérifier que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $(M_1, M_2) \in (\mathcal{C}(A))^2$ alors $M_1 M_2 \in \mathcal{C}(A)$.

Il est clair que $0 \in \mathcal{C}(A)$. Soient $B, C \in \mathcal{C}(A)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $A(\alpha B + C) = \alpha AB + AC = \alpha BA + CA = (\alpha B + C)A$.

Soient $M_1, M_2 \in \mathcal{C}(A)$. Alors $AM_1 M_2 = M_1 A M_2 = M_1 M_2 A$, et par suite $M_1 M_2 \in \mathcal{C}(A)$.

Q.2 ▷ On suppose que $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$ où $U \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

Vérifier que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A) = U \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) U^{-1}$.

On a pour $k \in \mathbb{N}$, $A^k = U \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) U^{-1}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^m a_k A^k = \sum_{k=0}^m a_k U \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) U^{-1} = U \left(\sum_{k=0}^m a_k \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \right) U^{-1} \\ &= U \operatorname{diag} \left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^m a_k \lambda_n^k \right) U^{-1} = U \operatorname{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) U^{-1}. \end{aligned}$$

Dans les deux questions suivantes, on se propose de démontrer le théorème d'interpolation de Lagrange. Soient $m \geq 1$ et $a_1, a_2, \dots, a_m$ des réels deux à deux distincts.

Q.3 ▷ Montrer que l'application $\phi : \mathbb{R}_{m-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_m))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.

Il est clair que ϕ est linéaire.

$P \in \operatorname{Ker}(\phi)$ si et seulement si $\phi(P) = (0, \dots, 0)$, si et seulement si $P(a_1) = \dots = P(a_m) = 0$ si et seulement si le polynôme P est nul (puisque le polynôme nul est l'unique polynôme possédant m racines distinctes et de degré inférieur à $m-1$). Donc $\operatorname{Ker}(\phi) = \{0_{\mathbb{R}_{m-1}[X]}\}$ et ϕ est injective. Puisque la dimension de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ est égale à la dimension de $\mathbb{R}^m$, alors ϕ est un isomorphisme.

Q.4 ▷ Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $a_1, \dots, a_m$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Dédurre qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ vérifiant $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Le polynôme P est appelé le polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ interpolateur de f aux points $a_1, \dots, a_m$.

On a le m -uplet $(f(a_1), \dots, f(a_m)) \in \mathbb{R}^m$ et ϕ est un isomorphisme, donc il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ vérifiant $\phi(P) = (f(a_1), \dots, f(a_m))$, c'est à dire $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Dans toute la suite, on note $g_0 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$,

$$\mathcal{D}_n^+ = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et telle que } \operatorname{Sp}(M) \subset [0, +\infty[\},$$

$$\mathcal{S}_n^+ = \{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \operatorname{Sp}(M) \subset [0, +\infty[\}.$$

Q.5 ▷ ► Soit P_0 le polynôme de $\mathbb{R}_1[X]$ interpolateur de g_0 aux points 1 et 4. Vérifier que $P_0 = \frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$.

► Justifier que $\mathcal{S}_n^+ \subset \mathcal{D}_n^+$.

$P_0 \in \mathbb{R}_1[X]$, donc $P_0(X) = aX + b$ avec a et b réels. On a $P_0(1) = g_0(1) = 1$ et $P_0(4) = g_0(4) = 2$. Ainsi $a + b = 1$ et $4a + b = 2$. D'où $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.

On sait que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\mathcal{S}_n^+ \subset \mathcal{D}_n^+$.

Q.6 ▷ Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathcal{S}_n^+$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle X, MX \rangle \geq 0$.

Supposons que $\langle X, MX \rangle \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit λ une valeur propre de M . Il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. Ainsi $\lambda \|X\|^2 = \langle X, MX \rangle \geq 0$, ce qui implique que $\lambda \geq 0$.

Réciproquement, supposons que $M \in \mathcal{S}_n^+$. On sait qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (V_1, \dots, V_n)$ de vecteurs propres de M . Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (qui sont positives) de M associées aux vecteurs propres $V_1, \dots, V_n$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $X = \sum_{i=1}^n x_i V_i$ et par suite $MX = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i V_i$. Ainsi $\langle X, MX \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \lambda_i \geq 0$.

Partie II.

Définition : Soit $A \in \mathcal{D}_n^+$. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les éléments deux à deux distincts de $\text{Sp}(A)$ et P le polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ interpolateur de g_0 aux points $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.

On définit alors, la matrice racine carrée de A , notée $\sqrt{A}$, par $\sqrt{A} = P(A)$.

II.A)

Q.7 ▷ Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $B \in \mathcal{D}_2^+$. Donner alors l'expression de $\sqrt{B}$.

On a :

$$\chi_B = \begin{vmatrix} X-5 & 4 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X-5) + 4 = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4).$$

Ainsi $\text{Sp}(B) = \{1, 4\}$ et B admet deux valeurs propres distinctes, ce qui implique que $B \in \mathcal{D}_2^+$. Or, P_0 est le polynôme interpolateur de g_0 aux points 1 et 4. D'où

$$\sqrt{B} = P_0(B) = \frac{1}{3}(B + 2I_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Q.8 ▷ Soit C une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = 5C - 4I_n$, $C \neq 4I_n$ et $C \neq I_n$. Montrer que $C \in \mathcal{D}_n^+$ et que $\sqrt{C} = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}I_n$.

Soit $Q = X^2 - 5X + 4$. On a $Q(C) = 0$ et $Q = (X-4)(X-1)$: scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples et par suite C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus, comme $Q(C) = 0$ alors $\text{Sp}(C) \subset \{\lambda \in \mathbb{R}, Q(\lambda) = 0\} = \{1, 4\} \subset [0, +\infty[$. Ainsi $C \in \mathcal{D}_n^+$.

Si $1 \notin \text{Sp}(C)$ alors comme C est diagonalisable, on aura C est semblable à $\text{diag}(4, \dots, 4) = 4I_n$ et par suite $C = 4I_n$, ce qui est absurde.

De même, si $4 \notin \text{Sp}(C)$ alors comme C est diagonalisable, on aura C est semblable à $\text{diag}(1, \dots, 1) = I_n$ et par suite $C = I_n$, ce qui est absurde.

On obtient que $\text{Sp}(C) = \{1, 4\}$. Ainsi $\sqrt{C} = P_0(C) = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}I_n$.

On considère, dans la suite, une matrice $A \in \mathcal{D}_n^+$. On choisit $U \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $A = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$.

Q.9 ▷ Justifier que pour tout $1 \leq i \leq n$, $\lambda_i \geq 0$ et que $\sqrt{A} = U \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) U^{-1}$.

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \text{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$. Considérons $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}$ les valeurs propres distinctes de A . Donc, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$ interpolateur de g_0 aux points $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}$. Ainsi, pour $1 \leq i \leq n$, $P(\lambda_i) = g_0(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ car $\lambda_i \in \{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_m}\}$, et d'après la question Q2), on a $P(A) = U \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) U^{-1} = U \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) U^{-1}$.

Q.10 ▷ Dédurre que $\sqrt{A} \in \mathcal{D}_n^+$ et que $(\sqrt{A})^2 = A$.

$\sqrt{A}$ est semblable à une matrice diagonale, donc elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont celles de $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ qui sont positives et ainsi $\sqrt{A} \in \mathcal{D}_n^+$.

De plus $\sqrt{A}^2 = U \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}^2, \dots, \sqrt{\lambda_n}^2) U^{-1} = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1} = A$.

Q.11 ▷ Soit $R \in \mathcal{D}_n^+$. Montrer que $R^2 \in \mathcal{D}_n^+$ et que $\sqrt{R^2} = R$.

Si $R \in \mathcal{D}_n^+$, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ et $V \in GL_n(\mathbb{R})$, tel que $R = V \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) V^{-1}$. Donc $R^2 = V \operatorname{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2) V^{-1}$ et $R^2 \in \mathcal{D}_n^+$. D'après la question précédente

$$\sqrt{R^2} = V \operatorname{diag}(\sqrt{\alpha_1^2}, \dots, \sqrt{\alpha_n^2}) V^{-1} = R.$$

Q.12 ▷ Dédurre que $\sqrt{A}$ est l'unique matrice $R \in \mathcal{D}_n^+$ qui vérifie $R^2 = A$.

D'après la question Q10), on a $\sqrt{A} \in \mathcal{D}_n^+$ et vérifie $(\sqrt{A})^2 = A$. Soit $R \in \mathcal{D}_n^+$ et vérifiant $R^2 = A$. Alors, d'après la question précédente $R = \sqrt{R^2} = \sqrt{A}$.

Q.13 ▷ On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^+$. Montrer que $\sqrt{A}$ est l'unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^+$ vérifiant $R^2 = A$.

Puisque $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^t$ avec $U \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\sqrt{A} = U \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) U^t \text{ et } {}^t\sqrt{A} = U \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) U = \sqrt{A}.$$

Par suite $\sqrt{A} \in \mathcal{S}_n^+$ et elle est l'unique matrice de $\mathcal{S}_n^+$ d'après la question précédente.

Q.14 ▷ Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$ et que $\sqrt{{}^tMM} M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

On a ${}^t({}^tMM) = {}^tMM$, ainsi ${}^tMM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle X, {}^tMMX \rangle = {}^tX {}^tMMX = {}^t(MX)MX = \|MX\|^2 \geq 0.$$

D'où ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^+$. De plus $\det({}^tMM) = (\det(M))^2 > 0$ car $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Ceci implique que $\sqrt{{}^tMM} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ d'après la question Q13). D'autre part

$$\begin{aligned} {}^t(\sqrt{{}^tMM})^{-1} \sqrt{{}^tMM} M^{-1} &= {}^tM^{-1} {}^t\sqrt{{}^tMM} \sqrt{{}^tMM} M^{-1} = {}^tM^{-1} \sqrt{{}^tMM} \sqrt{{}^tMM} M^{-1} \\ &= {}^tM^{-1} {}^tMMM^{-1} = I_n. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $\sqrt{{}^tMM} M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Q.15 ▷ **Application :** On considère un sous-groupe G du groupe $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$ et soit $M \in G$. Montrer que $\sqrt{{}^tMM} \in G$ puis que ${}^tM \in G$.

Il existe $U \in O_n(\mathbb{R}) \subset G$ tel que $\sqrt{{}^tMM} M^{-1} = U$, ce qui implique que $\sqrt{{}^tMM} = MU \in G$ puisque M et $U \in G$ et G est un groupe. Par suite ${}^tMM = (\sqrt{{}^tMM})^2 \in G$ et ${}^tM = ({}^tMM)M^{-1} \in G$.

II.B)

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que la matrice exponentielle de A est définie par $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Dans la suite, on fixe une matrice $A \in \mathcal{D}_n^+$ et on considère le système différentiel d'inconnue $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} X''(t) = AX(t) \\ X(0) = X_0 \\ X'(0) = 0 \end{cases} \quad (S)$$

où $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q.16 ▷ On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $Y_0(t) = \frac{1}{2}(e^{t\sqrt{A}} + e^{-t\sqrt{A}})X_0$. Montrer que Y_0 est deux fois dérivable et qu'elle est une solution sur $\mathbb{R}$ du système (S).

On sait que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto e^{tM}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $t \mapsto Me^{tM}$.

D'autre part, $Y_0(t) = \frac{1}{2}L(e^{t\sqrt{A}} + e^{-t\sqrt{A}})$ où $L : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \mapsto MX_0$ qui est linéaire donc Y_0 est dérivable et

$$\begin{aligned} Y_0'(t) &= \frac{1}{2}L(\sqrt{A}e^{t\sqrt{A}} - \sqrt{A}e^{-t\sqrt{A}}) = \frac{1}{2}(\sqrt{A}e^{t\sqrt{A}} - \sqrt{A}e^{-t\sqrt{A}})X_0 \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{A}(e^{t\sqrt{A}} - e^{-t\sqrt{A}})X_0 = \frac{1}{2}L_1(e^{t\sqrt{A}} - e^{-t\sqrt{A}}) \end{aligned}$$

avec $L_1 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $M \mapsto \sqrt{A}MX_0$ qui est aussi linéaire. Donc Y_0 est deux fois dérivable et $Y_0''(t) = \frac{1}{2}L_1(\sqrt{A}e^{t\sqrt{A}} + \sqrt{A}e^{-t\sqrt{A}}) = \frac{1}{2}A(e^{t\sqrt{A}} + e^{-t\sqrt{A}})X_0$. Ainsi $Y_0'' = AY_0$.

De plus $Y_0(0) = X_0$, $Y_0'(0) = 0$. Ainsi Y_0 est une solution de (S).

Soit $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable et solution du système (S). On pose pour tout

$t \in \mathbb{R}$, $Z(t) = \begin{pmatrix} Y(t) - Y_0(t) \\ Y'(t) - Y_0'(t) \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$ qui appartient à $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q.17 ▷ Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $Z'(t) = BZ(t)$ et $Z(0) = 0$.

Puisque Y est une solution de (S), alors $Z(0) = \begin{pmatrix} Y(0) - Y_0(0) \\ Y'(0) - Y_0'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 - X_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Z'(t) = \begin{pmatrix} Y'(t) - Y_0'(t) \\ Y''(t) - Y_0''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y'(t) - Y_0'(t) \\ A(Y(t) - Y_0(t)) \end{pmatrix} = BZ(t)$.

Q.18 ▷ Dédurre que Z est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ puis que $Y = Y_0$.

Le problème $Z' = BZ$ et $Z(0) = 0$ est de Cauchy donc il admet une unique solution qui est la fonction $Z = 0$. Ainsi $Y = Y_0$.

Q.19 ▷ Soit L la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $L(t) = \|Y_0(t)\|^2$. Montrer que L est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour $t \in \mathbb{R}$, $L''(t) = 2\langle AY_0(t), Y_0(t) \rangle + 2\|Y_0'(t)\|^2$.

Dédurre que si $A \in \mathcal{S}_n^+$ alors L est convexe.

$L(t) = B(Y_0(t), Y_0(t))$ où $B = \langle, \rangle$ qui est bilinéaire donc L est dérivable et $L'(t) = B(Y_0'(t), Y_0(t)) + B(Y_0(t), Y_0'(t)) = 2\langle Y_0(t), Y_0'(t) \rangle$.

De plus, comme Y_0 est deux fois dérivable alors Y_0' est dérivable et donc L est deux fois dérivable et $L''(t) = 2\langle Y_0'(t), Y_0'(t) \rangle + 2\langle Y_0''(t), Y_0(t) \rangle = 2\|Y_0'(t)\|^2 + 2\langle AY_0(t), Y_0(t) \rangle$.

Si $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors $L''(t) = 2(\langle AY_0(t), Y_0(t) \rangle + \|Y_0'(t)\|^2) \geq 0$ d'après la question Q6) et ainsi L est convexe.

II.C)

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{R})$ et $V_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère l'application $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$f(X) = \frac{1}{2}\langle X, AX \rangle - \langle V_0, X \rangle.$$

Q.20 ▷ Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$f(X+H) - f(X) = \langle H, AX + V_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle H, AH \rangle$$

Déduire que f est différentiable sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en un point X est donnée par

$$Df(X)H = \langle H, AX - V_0 \rangle, \quad \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

On a

$$\begin{aligned} f(X+H) - f(X) &= \frac{1}{2} \langle X+H, A(X+H) \rangle - \langle V_0, X+H \rangle - \left(\frac{1}{2} \langle X, AX \rangle - \langle V_0, X \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (\langle X, AH \rangle + \langle H, AX \rangle + \langle H, AH \rangle) - \langle V_0, H \rangle. \end{aligned}$$

Puisque A est symétrique, alors $\langle X, AH \rangle = \langle H, AX \rangle$ et ainsi

$$f(X+H) - f(X) = \langle H, AX - V_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle H, AH \rangle.$$

L'application $H \rightarrow \langle H, AX - V_0 \rangle$ est linéaire et $\|\langle H, AH \rangle\| \leq \|H\| \|AH\| = o(H)$. Ainsi f est différentiable et $Df(X)H = \langle H, AX - V_0 \rangle$.

Q.21 ▷ Montrer que f admet un minimum sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ atteint en un point unique qu'on déterminera.

Si X_0 est un point extrémum de f , alors X_0 est un point critique de f . Or $Df(X_0) = 0$ est équivalent à $AX_0 = V_0$. Puisque $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors $\langle H, AH \rangle \geq 0$ et par suite $f(X_0 + H) - f(X_0) = \frac{1}{2} \langle H, AH \rangle \geq 0$. Ainsi f atteint son minimum au point $X_0 = A^{-1}V_0$ qui est l'unique point critique de f .

Dans la suite, on pose $S = \sqrt{A}$ et on considère un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q.22 ▷ Justifier que $S \in GL_n(\mathbb{R})$ et vérifier que $f(X) = \frac{1}{2} \|SX - S^{-1}V_0\|^2 - \frac{1}{2} \|S^{-1}V_0\|^2$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\sqrt{A}^2 = A$, donc $(\det(\sqrt{A}))^2 = \det(A) > 0$.

Puisque $A \in \mathcal{S}_n^+$, alors $\sqrt{A} \in \mathcal{S}_n^+$ et $\langle SX, Y \rangle = \langle X, SY \rangle$ pour tous X, Y . Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|SX - S^{-1}V_0\|^2 - \frac{1}{2} \|S^{-1}V_0\|^2 &= \frac{1}{2} (\|SX\|^2 + \|S^{-1}V_0\|^2 - 2\langle SX, S^{-1}V_0 \rangle) - \frac{1}{2} \|S^{-1}V_0\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle \sqrt{A}X, \sqrt{A}X \rangle - \langle X, V_0 \rangle = \frac{1}{2} \langle X, AX \rangle - \langle X, V_0 \rangle = f(X). \end{aligned}$$

Q.23 ▷ On pose $\mathcal{F}_S = \{SX, X \in \mathcal{F}\}$. Montrer qu'il existe un unique élément $Y_0 \in \mathcal{F}_S$ tel que

$$\|Y_0 - S^{-1}V_0\|^2 = \min_{Y \in \mathcal{F}_S} \|Y - S^{-1}V_0\|^2.$$

On vérifie que $\mathcal{F}_S$ est un s.e.v de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc d'après le théorème de la projection orthogonale, le vecteur Y_0 qui est le projeté orthogonal de $S^{-1}V_0$ sur $\mathcal{F}_S$ est l'unique élément de $\mathcal{F}_S$ qui vérifie $\|Y_0 - S^{-1}V_0\|^2 = \min_{Y \in \mathcal{F}_S} \|Y - S^{-1}V_0\|^2$.

Q.24 ▷ Déduire que la restriction de l'application f sur $\mathcal{F}$ admet un minimum atteint uniquement au point

$$X_1 = S^{-1}Y_0.$$

Il est clair que Y_0 est l'unique élément de $\mathcal{F}_S$ qui vérifie

$$\begin{aligned} \|Y_0 - S^{-1}V_0\|^2 - \|S^{-1}V_0\|^2 &= \min_{Y \in \mathcal{F}_S} \|Y - S^{-1}V_0\|^2 - \|S^{-1}V_0\|^2 = \min_{X \in \mathcal{F}} \|SX - S^{-1}V_0\|^2 - \|S^{-1}V_0\|^2 \\ &= \min_{X \in \mathcal{F}} f(X). \end{aligned}$$

Puisque $Y_0 \in \mathcal{F}_S$ est unique et S réalise une bijection de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}_S$, alors il existe un unique X_1 tel que $SX_1 = Y_0$, ce qui implique $f(X_1) = \min_{X \in \mathcal{F}} f(X)$ et X_1 est l'unique élément réalisant ce minimum.

Partie III. (indépendante des sous-parties II.B et II.C)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle couple de décomposition de Dunford de M , tout couple (D, N) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M = D + N$, D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, N est nilpotente et $DN = ND$.

III.A)

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A admet un couple (D, N) de décomposition de Dunford et on note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les valeurs propres deux à deux distinctes de D .

Q.25 ▷ Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \text{Sp}(D)$. Montrer que $\det(I_n - (\lambda I_n - D)^{-1}N) = 1$ puis que $\chi_A(\lambda) = \chi_D(\lambda)$.

Puisque D et N commutent, alors N et $(\lambda I_n - D)^{-1}$ commutent. Ainsi $((\lambda I_n - D)^{-1}N)^n = (\lambda I_n - D)^{-n}N^n = 0$, ce qui implique que $(\lambda I_n - D)^{-1}N$ est nilpotente et elle semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Donc $(I_n - (\lambda I_n - D)^{-1}N)$ est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec la valeur 1 sur la diagonale, d'où $\det(I_n - (\lambda I_n - D)^{-1}N) = 1$.

D'autre part, $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - D - N) = \det((\lambda I_n - D)(I_n - (\lambda I_n - D)^{-1}N)) = \det(\lambda I_n - D) \det(I_n - (\lambda I_n - D)^{-1}N) = \chi_D(\lambda)$.

Q.26 ▷ Montrer alors que $\chi_A = \chi_D$ et déduire que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\chi_A - \chi_D$ est un polynôme qui admet un nombre infini de zéros, donc il est nul et par suite $\chi_A = \chi_D$. Puisque D est diagonalisable, donc $\chi_A = \chi_D$ est scindé et donc A est trigonalisable.

Q.27 ▷ Soit $1 \leq i \leq m$. Vérifier que $(A - \alpha_i I_n)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k N^{n-k} (D - \alpha_i I_n)^k$.

En déduire que $E_{\alpha_i}(D) \subset \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$.

$N^n = 0$, N et $D - \alpha_i I_n$ commutent, donc $(A - \alpha_i I_n)^n = (N + D - \alpha_i I_n)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k N^{n-k} (D - \alpha_i I_n)^k = N^n + \sum_{k=1}^n C_n^k N^{n-k} (D - \alpha_i I_n)^k = \sum_{k=1}^n C_n^k N^{n-k} (D - \alpha_i I_n)^k$.
Il est clair que $E_{\alpha_i}(D) \subset \text{Ker}((D - \alpha_i I_n)^k)$ pour tout $k \geq 1$ et donc $E_{\alpha_i}(D) \subset \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$.

Q.28 ▷ Montrer que $\sum_{i=1}^m \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$ est une somme directe puis que, pour tout $1 \leq i \leq m$,

$$E_{\alpha_i}(D) = \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n).$$

Les polynômes $(X - \alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont premiers entre eux deux à deux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux $\bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n) = \text{Ker}\left(\prod_{i=1}^m (A - \alpha_i I_n)^n\right).$

Puisque D est diagonalisable, donc $n = \sum_{i=1}^m \dim E_{\alpha_i}(D) \leq \sum_{i=1}^m \dim \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n) = \dim \text{Ker}\left(\prod_{i=1}^m (A - \alpha_i I_n)^n\right) \leq n$. Ainsi pour tout $1 \leq i \leq m$, $\dim E_{\alpha_i}(D) = \dim \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n)$ et par suite $E_{\alpha_i}(D) = \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n).$

On suppose que (D_1, N_1) est un autre couple de décomposition de Dunford de A .

Q.29 ▷ Montrer que $\text{Sp}(D_1) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ et que, pour tout $1 \leq i \leq m$, $E_{\alpha_i}(D_1) = E_{\alpha_i}(D).$

On a $\chi_A = \chi_{D_1} = \chi_D$. Donc $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(D_1)$. De plus, $E_{\alpha_i}(D_1) = \text{Ker}((A - \alpha_i I_n)^n) = E_{\alpha_i}(D).$

Q.30 ▷ Montrer alors que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $D_1 X = DX$. Dédurre que $D_1 = D$ et $N_1 = N$.

On conclut qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au plus un couple de décomposition de Dunford.

Soit $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres de D associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Puisque $E_{\alpha_i}(D) = E_{\alpha_i}(D_1)$, alors $DV_i = \lambda_i V_i = D_1 V_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi $D_1 = D$ et par suite $N = A - D = A - D_1 = N_1$.

III.B)

On note $\mathcal{T}_n^{+*} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ trigonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \text{Sp}(M) \subset]0, +\infty[\}.$

On considère, dans cette partie, une matrice $A \in \mathcal{T}_n^{+*}$. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ les éléments deux à deux distincts de $\text{Sp}(A)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

Q.31 ▷ Montrer qu'il existe des entiers positifs $r_1, \dots, r_m$ tels que $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}((u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i})$. Justifier que pour tout $1 \leq i \leq m$, $\text{Ker}((u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i})$ est stable par u .

Puisque u est trigonalisable, donc le polynôme caractéristique associé à u est scindé sur $\mathbb{R}$ et il est de la forme $\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)^{r_i}$. Les polynômes $(X - \alpha_i)^{r_i}$ étant premiers entre eux deux à deux, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker} \prod_{i=1}^m (u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i} = \bigoplus_{i=1}^m \text{Ker}((u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i}).$$

Puisque u commute avec $(u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i}$, donc $\text{Ker}((u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i})$ est stable par u .

Pour tout $1 \leq i \leq m$, on pose $F_i = \text{Ker}((u - \alpha_i \text{Id}_{\mathbb{R}^n})^{r_i})$, $d_i = \dim F_i$ et on note par u_i l'endomorphisme de F_i induit par u .

Q.32 ▷ Justifier que, pour tout $1 \leq i \leq m$, l'endomorphisme $u_i - \alpha_i \text{Id}_{F_i}$ est nilpotent.

Dédurre qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = U \text{diag}(\alpha_1 I_{d_1} + N_1, \dots, \alpha_m I_{d_m} + N_m) U^{-1}$ où pour

tout $1 \leq i \leq m$, N_i est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in F_i$, $(u_i - \alpha_i \text{Id}_{F_i})^{r_i}(x) = 0$, ainsi $(u_i - \alpha_i \text{Id}_{F_i})^{r_i} = 0$ et ainsi $(u_i - \alpha_i \text{Id}_{F_i})$ est nilpotent. On a $u_i = (u_i - \alpha_i \text{Id}_{F_i}) + \alpha_i \text{Id}_{F_i}$. On considère une base $\mathcal{B}_i$ de F_i . Alors $M_{\mathcal{B}_i}(u_i) = N_i + \alpha_i \text{Id}_{d_i}$ avec N_i soit nilpotente. Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$. Alors $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ et $M_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\alpha_1 \text{Id}_{d_1} + N_1, \dots, \alpha_m \text{Id}_{d_m} + N_m)$ d'où il existe $U \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = U \text{diag}(\alpha_1 \text{Id}_{d_1} + N_1, \dots, \alpha_m \text{Id}_{d_m} + N_m) U^{-1}$.

Q.33 ▷ Montrer que A admet un unique couple de décomposition de Dunford (D, N) en donnant son expression en fonction de U . Justifier que $D \in \mathcal{D}_n^+$.

$A = U \text{diag}(\alpha_1 \text{Id}_{d_1}, \dots, \alpha_m \text{Id}_{d_m}) U^{-1} + U \text{diag}(N_1, \dots, N_m) U^{-1} = D + N$.
 $D = U \text{diag}(\alpha_1 \text{Id}_{d_1}, \dots, \alpha_m \text{Id}_{d_m}) U^{-1}$ donc D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 Comme $N_1, \dots, N_m$ sont nilpotentes donc il existe $p_1, \dots, p_m$ tels que $N_i^{p_i} = 0$ pour tout i .
 On pose $p = \max_{1 \leq i \leq m} p_i$. Alors $N^p = U \text{diag}(N_1^p, \dots, N_m^p) U^{-1} = U \text{diag}(0, \dots, 0) U^{-1} = 0$.
 Donc N est nilpotente. De plus,
 $ND = U \text{diag}(N_1, \dots, N_m) \text{diag}(\alpha_1 \text{Id}_{d_1}, \dots, \alpha_m \text{Id}_{d_m}) U^{-1} = U \text{diag}(\alpha_1 N_1, \dots, \alpha_m N_m) U^{-1} = DN$.
 D'autre part $\text{Sp}(D) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}^+$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note P_k le polynôme de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vérifiant pour tout $1 \leq i \leq m$, $P_k(\alpha_i) = g_0^{(k)}(\alpha_i)$, où g_0 est la fonction définie dans la partie I., $g_0^{(0)} = g_0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g_0^{(k)}$ désigne la dérivée k -ème (sur $]0, +\infty[$) de g_0 .

On note

$$g_0(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^k = P_0(D) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^{k-1} \right) N.$$

où (D, N) est le couple de décomposition de Dunford de A .

Q.34 ▷ Montrer que $P_0(D) = \sqrt{D}$ et déduire que si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $g_0(A) = \sqrt{A}$.

Désormais, l'expression $g_0(A)$ sera notée $\sqrt{A}$ et appelée racine carrée de A .

Puisque $\text{Sp}(D) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}^+$ et P_0 est le polynôme interpolateur de g_0 aux points $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, alors $P_0(D) = \sqrt{D}$ d'après la partie II. Puisque A est diagonalisable et la décomposition de Dunford est unique, alors $A = D + N$ avec $D = A$ et $N = 0$. Donc $g_0(A) = P_0(D) = \sqrt{D} = \sqrt{A}$.

Q.35 ▷ Montrer que pour tous $k \geq 2$ et $x > 0$, on a

$$\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} g_0^{(j)}(x) g_0^{(k-j)}(x) = 0.$$

On a $(g_0 \cdot g_0)(x) = x$. Pour $k \geq 2$, on a $(g_0 \cdot g_0)^{(k)}(x) = 0$. Or $(g_0 \cdot g_0)^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^k C_k^j g_0^{(j)}(x) g_0^{(k-j)}(x)$, d'où le résultat.

Q.36 ▷ Déduire que, pour tout $k \geq 2$, $\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} P_j(D) P_{k-j}(D) = 0$ et vérifier que $2 P_0(D) P_1(D) = I_n$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de D compt  es avec leurs ordres de multiplicités.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} P_j(D) P_{k-j}(D) &= \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} P_j P_{k-j} \right) (D) \\ &= U \operatorname{diag} \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} P_j(\lambda_1) P_{k-j}(\lambda_1), \dots, \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} P_j(\lambda_n) P_{k-j}(\lambda_n) \right) U^{-1} \\ &= U \operatorname{diag} \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} g_0^{(j)}(\lambda_1) g_0^{(k-j)}(\lambda_1), \dots, \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!(k-j)!} g_0^{(j)}(\lambda_n) g_0^{(k-j)}(\lambda_n) \right) U^{-1} = 0. \end{aligned}$$

$$P_0(D) = U \operatorname{diag} \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n} \right) U^{-1}$$

$$\text{et } P_1(D) = U \operatorname{diag} \left(g'_0(\lambda_1), \dots, g'_0(\lambda_n) \right) U^{-1} = U \operatorname{diag} \left(\frac{1}{2\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}} \right) U^{-1}.$$

$$\text{Donc } P_0(D) P_1(D) = U \operatorname{diag} \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right) U^{-1} = \frac{1}{2} I_n.$$

Q.37 ▷ Montrer que, pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$, $P_k(D) N^j = N^j P_k(D)$ puis établir que $(\sqrt{A})^2 = A$.

On a $D \in \mathcal{C}(N)$, donc $D^i \in \mathcal{C}(N^i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et par suite $P(D) \in \mathcal{C}(N^j)$ pour tout polynôme P d'après la première question.

$$\begin{aligned} (g_0(A))^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^k \right)^2 = \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} P_i(D) N^i P_j(D) N^j \\ &= \sum_{i,j=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} P_i(D) P_j(D) N^{i+j} = \sum_{k=0}^{2n-2} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=k}} P_i(D) P_j(D) \right) N^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{\substack{0 \leq i,j \leq n \\ i+j=k}} P_i(D) P_j(D) \right) N^k. \end{aligned}$$

Or pour $0 \leq k \leq n-1$, $\{(i, j), \text{ tel que } 0 \leq i, j \leq n, i+j=k\} = \{(i, k-i), 0 \leq i \leq k\}$. Alors $(g_0(A))^2 = (P_0(D))^2 + (P_0(D) P_1(D) + P_1(D) P_0(D)) N + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \frac{1}{(k-j)!} P_j(D) P_{k-j}(D) \right) N^k = D + N = A$.

Q.38 ▷ Montrer que $\left(\sqrt{D}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^k \right)$ est un couple de décomposition de Dunford de $\sqrt{A}$.

$\sqrt{D} \in \mathcal{D}_n^+$ donc diagonalisable et $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(D) N^k$ est nilpotente et ils commutent, donc c'est une décomposition de Dunford de $\sqrt{A}$.

Q.39 ▷ Déduire que $\sqrt{A} \in \mathcal{T}_n^{+*}$.

$\chi_{\sqrt{A}} = \chi_{\sqrt{D}}$. Donc $\sqrt{A}$ est trigonalisable et $\operatorname{Sp}(\sqrt{A}) = \operatorname{Sp}(\sqrt{D}) \subset [0, +\infty[$.

D'autre part $\sqrt{A}^2 = A \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $\sqrt{A} \in GL_n(\mathbb{R})$ et par suite $0 \notin \operatorname{Sp}(\sqrt{A})$.

Exemples :

Q.40 ▷ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et $\lambda > 0$. Justifier que $\lambda I_n + M \in \mathcal{T}_n^{+*}$ et montrer que

$$\sqrt{\lambda I_n + M} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} g_0^{(k)}(\lambda) M^k.$$

$\lambda I_n + M = D + N$ avec $D = \lambda I_n$ qui est diagonalisable et $N = M$ qui est nilpotente donc $\lambda I_n + M$ est trigonalisable et $\text{Sp}(\lambda I_n + M) = \text{Sp}(\lambda I_n) = \{\lambda\}$.

D'après l'unicité de la décomposition, $\sqrt{\lambda I_n + M} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_k(\lambda I_n) M^k$ où P_k est le polynôme de $\mathbb{R}_0[X]$ tel que $P_k(\lambda) = g_0^{(k)}(\lambda)$ donc $P_k = g_0^{(k)}(\lambda)$ et par suite $P_k(\lambda I_n) = g_0^{(k)}(\lambda) I_n$.

Alors $\sqrt{\lambda I_n + M} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} g_0^{(k)}(\lambda) M^k$.

Q.41 ▷ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A \in \mathcal{T}_3^{+*}$ et donner la matrice $\sqrt{A}$.

On a $A = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul simple donne $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

Donc $\sqrt{A} = g_0(1)I_3 + g_0'(1)N + \frac{1}{2}g_0''(1)N^2 = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

★ Fin de l'épreuve ★